
SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

N. GAROFALO

SVILUPPI RECENTI IN ANALISI ARMONICA
(II Parte)

4 GIUGNO 1987

2. TEOREMI DI RESTRIZIONE DELLA TRASFORMATTA DI FOURIER E LORO APPLICAZIONE AD ALCUNI PROBLEMI PER EQUAZIONI ALLE DERIVATE PARZIALI

Il primo problema che intendo discutere in questa nota è quello dell'unicità per equazioni alle derivate parziali (di tipo ellittico o iperbolico) del secondo ordine, e metterne in luce il legame con il problema della restrizione discusso nella nota $[G]_1$. Consideriamo l'operatore di Schrödinger stazionario

$$(2.1) \quad H = -\Delta + V,$$

dove V è un potenziale che si supporrà appartenente a un'opportuna classe funzionale. Diciamo che H ha la *proprietà d'unicità* se dato un aperto connesso $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ l'unica soluzione di $Hu = 0$ in Ω che può annullarsi su un sottoinsieme aperto $\Omega' \subset \Omega$ è quella identicamente nulla. Sapere che una certa classe di operatori di Schrödinger possiede la proprietà d'unicità è un problema di notevole interesse, tanto matematico che fisico. Infatti, tale proprietà è legata all'assenza di autovalori positivi per l'operatore H , il che comporta, se il potenziale tende a zero all'infinito in modo opportuno, che l'intersezione dello spettro puntuale e dello spettro assolutamente continuo di H è o vuoto, oppure costituito dal solo zero, cfr. $[RS]$. Un'esposizione dei risultati più recenti sull'unicità per operatori ellittici del secondo ordine è stata fatta in $[G]_{2,3}$, e io rinvio a quella sede e ai lavori $[JK]$, $[K]_{1,2}$, per quanto riguarda i risultati stessi, loro estensioni, e la bibliografia. Nel seguito mi limiterò a presentare uno dei possibili approcci al problema dell'unicità. Tale approccio si basa su opportune stime a priori di tipo Carleman che vengono dimostrate facendo uso del Lemma di Tomas-Stein (cfr. la prova del Teorema 1.5 in $[G]_1$), e sue generalizzazioni.

Supponiamo di voler studiare il problema dell'unicità per l'operatore H con un potenziale $V \in L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$. E' noto che in tal caso l'esponente soglia (almeno per quanto riguarda l'unicità forte, cfr. $[JK]$) è $p = \frac{n}{2}$.

Un caso particolare di un teorema dimostrato in [KRS] è il seguente

Teorema 2.1. Siano $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$. Allora esiste una costante $C=C(n)>0$, tale che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(2.2) \quad \|e^{\lambda x} u\|_{p'} \leq C \|e^{\lambda x} \Delta u\|_p, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

E' noto (cfr. [KRS]) che la (2.2) ha come conseguenza diretta il seguente risultato globale di unicità

Teorema 2.2. Sia $V \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$ e sia $u \in H^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ una soluzione di $Hu = -\Delta u + Vu = 0$. Se il supp u giace da un solo lato di un iperpiano in \mathbb{R}^n , allora $u \equiv 0$ in \mathbb{R}^n .

Usando un'idea di Nirenberg basata sulla riflessione lungo una superficie strettamente convessa si può dimostrare che la (2.2) implica anche il seguente risultato locale

Teorema 2.3. Sia $V \in L^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n)$, sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto connesso e sia $u \in H_{loc}^{2,p}(\Omega)$ una soluzione di $Hu = 0$ in Ω . Se u si annulla in un sottoinsieme aperto Ω' di Ω , allora dev'essere $u \equiv 0$ in Ω .

Per le dimostrazioni dei Teoremi 2.2 e 2.3 si rinvia a [KRS]. Va osservato che una versione più forte del Teorema 2.3 era già stata dimostrata in [JK], ma usando idee diverse da quelle che appaiono in [KRS].

Consideriamo la (2.2). Se in essa poniamo $v = e^{\lambda x} u$, allora $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e (2.2) si riduce a

$$(2.3) \quad \|v\|_{p'} \leq C \|\Delta v - 2\lambda \partial_n v + \lambda^2 v\|_p, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

dove $\partial_n v = \frac{\partial v}{\partial x_n}$. Ora ponendo $u(x) = v(\lambda x)$ e usando il fatto che $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$, ci

si riduce a dimostrare la seguente disuguaglianza di tipo Sobolev

Teorema 2.4. Esiste $C = C(n) > 0$ tale che

$$(2.4) \quad \|u\|_p \leq C \|(\Delta - 2\partial_n + 1)u\|_p, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Consideriamo la funzione $m(\xi) = \frac{1}{4\pi^2|\xi|^2 - 1 + 4\pi i \xi_n}$ definita per

$\xi_n \neq 0$ e $4\pi^2|\xi|^2 \neq 1$. E' chiaro che la (2.4) è equivalente al seguente risultato di moltiplicazione della trasformata di Fourier

$$(2.5) \quad \|(m\hat{v})^\vee\|_p \leq C \|v\|_p, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

dove abbiamo denotato con $^\vee$ la trasformata inversa di Fourier. Vogliamo ora esporre l'idea che è dietro la dimostrazione di (2.5). Anzitutto osserviamo che se T è l'operatore definito da

$$\widehat{Tv} = m\hat{v},$$

allora provare la (2.5) equivale a dimostrare che $T : L^p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ con continuità. Ora sia $\xi = (\xi', \xi_n)$ e scegliamo $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\chi(t) = 1$ se $|t| \leq 10^{-2}$ e $\chi(t) = 0$ se $|t| \geq 2 \cdot 10^{-2}$. Se $\psi(\xi) = \chi(1 - 2\pi|\xi'|)\chi(\xi_n)$, poniamo

$$m_1(\xi) = \psi(\xi) m(\xi)$$

$$m_2(\xi) = [1 - \psi(\xi)] m(\xi).$$

Se $\widehat{T_i v} = m_i \hat{v}$, $i = 1, 2$, scriviamo

$$(2.6) \quad Tv = T_1 v + T_2 v.$$

Si osservi che $\text{supp } \psi$ è compatto. Inoltre, siccome $m_2 \in C^\infty(R^n)$, $m_2(\xi) = O(|\xi|^{-2})$ per $|\xi| \rightarrow +\infty$, e $D^\alpha m_2(\xi) = O(|\xi|^{-2-|\alpha|})$ per $|\xi| \rightarrow +\infty$, per il Teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev si ha

$$(2.7) \quad \|T_2 v\|_{p'} \leq C \|v\|_p, \quad v \in C_0^\infty(R^n).$$

Per provare la (2.5) ci resta perciò da far vedere che

$$(2.8) \quad \|T_1 v\|_{p'} \leq C \|v\|_p, \quad v \in C_0^\infty(R^n),$$

per un'opportuna costante $C = C(n) > 0$. A questo punto richiamiamo il Lemma di Tomas-Stein (cfr. $[G]_1$, Teorema 1.5). Ricordiamo la definizione dell'operatore di Tomas-Stein $Rf = \widehat{d\omega} * f$ (v. (1.46), dove $d\omega$ è la misura su S^{n-1}). Dalla (1.60) si ha

$$(2.9) \quad Rf(x) = \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle x, \omega \rangle} \widehat{f}(\omega) d\omega.$$

Nella dimostrazione del Teorema 1.5 in $[G]_1$ s'è fatto vedere che se $1 \leq s \leq \frac{2(n+1)}{n+3}$, e s' è tale che $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = 1$, allora

$$(2.10) \quad \|Rf\|_{s'} \leq C_{s,n} \|f\|_s, \quad f \in L^s(R^n)$$

per una certa costante $C_{s,n} > 0$. (2.10) si riscrive

$$(2.11) \quad \left\| \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle \cdot, \omega \rangle} \widehat{f}(\omega) d\omega \right\|_{s'} \leq C_{s,n} \|f\|_s, \quad f \in L^s(R^n).$$

Ora $\left(\frac{2(n+1)}{n+3}\right)' = \frac{2(n+1)}{n-1} \leq s' \leq +\infty$, e quindi

$$(2.12) \quad \frac{1}{s'} \leq \frac{n-1}{2(n+1)} < \frac{n+3}{2(n+1)} \leq \frac{1}{s}.$$

(2.12) dà

$$(2.13) \quad \frac{1}{s} - \frac{1}{s'} \geq \frac{n+3}{2(n+1)} - \frac{n-1}{2(n+1)} = \frac{2}{n+1}.$$

Se prendiamo $s = \frac{2(n+1)}{n+3}$ in (2.11), e quindi $s' = \frac{2(n+1)}{n-1}$, allora risulta

$$\frac{1}{s} - \frac{1}{s'} = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p'},$$

e inoltre (si osservi che $p = \frac{2n}{n+2}$, $p' = \frac{2n}{n-2}$)

$$(2.14) \quad p < s < s' < p'.$$

Ora sia $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia $\eta \equiv 1$ su $\text{supp } \psi$. Se $\theta = \bigvee \eta$, allora $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e risulta

$$(2.15) \quad T_1 v = \theta * T_1 v.$$

Usando la (2.14) si può scegliere $r > 1$ tale che

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{s'} + \frac{1}{r} - 1$$

e quindi per il Teorema di Young si ottiene

$$(2.16) \quad \|T_1 v\|_{p'} \leq \|\theta\|_r \|T_1 v\|_{s'} \leq C \|T_1 v\|_{s'}.$$

(2.8) sarà perciò dimostrata se facciamo vedere che esiste $C = C(n) > 0$ tale che

$$(2.17) \quad \|T_1 v\|_{s'} \leq C \|v\|_p, \quad v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Riscriviamo la (2.17) in coordinate polari:

$$\begin{aligned}
 (2.18) \quad \|T_1 v\|_S &= \|(m_1 \hat{v})^V\|_S = \left\| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i \langle \cdot, \xi \rangle} m_1(\xi) \hat{v}(\xi) d\xi \right\|_S = \\
 &= \left\| \int_0^{10^2} \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle \cdot, r\omega \rangle} \frac{\psi(r\omega)}{4\pi^2 r^2 - 1 + 4\pi i r \omega_n} \hat{v}(r\omega) d\omega r^{n-1} dr \right\|_S.
 \end{aligned}$$

Ora fissiamo $r > 0$ e poniamo

$$(2.19) \quad \hat{g}_r(\xi) = \frac{\psi(\xi) \hat{v}(\xi)}{4\pi^2 r^2 - 1 + 4\pi i r \xi_n}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Allora (2.18) si riscrive

$$\begin{aligned}
 (2.20) \quad \|T_1 v\|_S &= \left\| \int_0^{10^2} \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle \cdot, r\omega \rangle} \hat{g}_r(r\omega) d\omega r^{n-1} dr \right\|_S, \\
 &\leq \int_0^{10^2} \left\| \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle \cdot, r\omega \rangle} \hat{g}_r(r\omega) d\omega \right\|_S r^{n-1} dr,
 \end{aligned}$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo usato la disuguaglianza di Minkowski. Ora osserviamo che un cambiamento di scala in (2.11) dà

$$(2.21) \quad \left\| \int_{S^{n-1}} e^{2\pi i \langle \cdot, r\omega \rangle} \hat{f}(r\omega) d\omega \right\|_S \leq C_{S,n} r^{\frac{2n}{s_1}} \|f\|_S, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

Applicando la (2.21) e (2.20) con $f = g_r$ si ottiene

$$(2.22) \quad \|T_1 v\|_s \leq C_n \int_0^{10^2} r^{-\frac{2n}{s'}} \|g_r\|_s r^{n-1} dr.$$

Osserviamo adesso che per ogni fissato $r > 0$

$$(2.23) \quad g_r = \left(\frac{\psi(\xi) \tilde{v}(\xi)}{4\pi^2 r^2 - 1 + 4\pi i \xi_n} \right)^v$$

Siccome per (2.14) $\frac{1}{s} < \frac{1}{p}$ se poniamo

$$\frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{s} - \frac{1}{p},$$

allora per il Teorema di Young

$$(2.24) \quad \|g_r\|_s \leq \left\| \left(\frac{\psi(\xi)}{4\pi^2 r^2 - 1 + 4\pi i \xi_n} \right)^v \right\|_q \|v\|_p.$$

D'altra parte

$$(2.25) \quad \left\| \left(\frac{\psi(\xi)}{4\pi^2 r^2 - 1 + 4\pi i \xi_n} \right)^v \right\|_q \leq \frac{C}{|4\pi^2 r^2 - 1|^{1/q}}$$

e quindi si ha finalmente

$$(2.26) \quad \|T_1 v\|_s \leq C_n \int_0^{10^2} r^{-\frac{2n}{s'}} |4\pi^2 r^2 - 1|^{-1/q} r^{n-1} dr \|v\|_p.$$

Resta da analizzare l'integrale in (2.26). Si noti che l'integrando ha una singolarità integrabile a $r = 0$ in quanto $s' = \frac{2(n+1)}{n-1} > 2$, e quindi

$$\frac{2n}{s'} - n + 1 < 1.$$

Inoltre, non v'è alcun problema a $r = \frac{1}{2\pi}$ in quanto $q > 1$.

La dimostrazione di (2.17) è così completata, e con essa quella di (2.5), del Teorema 2.4 e, quindi, del Teorema 2.1. Come sopra detto quest'ultimo è solo un prototipo di una classe di risultati di unicità che nella loro versione più generale sono conseguenza della seguente disuguaglianza uniforme di tipo Sobolev. Sia $Q(\xi)$ una forma quadratica reale non singolare su \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, la quale per qualche $j \in \{2, \dots, n\}$ si possa scrivere

$$(2.27) \quad Q(\xi) = -\xi_1^2 - \dots - \xi_j^2 + \xi_{j+1}^2 + \dots + \xi_n^2.$$

Se $b = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{C}^n$, $a \in \mathbb{C}$, sia $P(D)$ l'operatore differenziale del secondo ordine

$$(2.28) \quad P(D) = Q(D) + b \cdot \nabla + a.$$

Teorema 2.5. (di Kenig-Ruiz-Sogge). Sia $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$. Allora esiste una costante $C = C(n) > 0$ tale che

$$(2.29) \quad \|u\|_{p'} \leq C \|P(D)u\|_p, \quad u \in H^{2,p}(\mathbb{R}^n).$$

Si osservi che se $P(D) = \Delta$, allora (2.29) è il Teorema di Hardy-Littlewood-Sobolev. Se invece $P(D) = \square$, dove $\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \sum_{j=2}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ è l'operatore delle

onde in \mathbb{R}^n , allora la (2.29) è stata dimostrata da Strichartz in [S]₁. Se $P(D) = \square + 1$, l'operatore di Klein-Gordon, allora la (2.29) è un caso particolare di un teorema di Marshall-Strauss-Wainger, [MSW].

Il Teorema 2.5 ha come conseguenza la seguente stima di tipo Carleman.

Teorema 2.6. (cfr. [KRS]). Sia $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$, e sia $v \in \mathbb{R}^n$ arbitrario. Allora se C è come in (2.29) si ha

$$(2.30) \quad \|e^{\lambda \langle v, \cdot \rangle} u\|_{p'} \leq C \|e^{\lambda \langle v, \cdot \rangle} P(D)u\|_{p'}, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Si osservi che se $v = (0, 0, \dots, 0, 1)$ e $P(D) = \Delta$ la (2.30) dà la (2.2). Il Teorema 2.6 implica il seguente risultato globale di unicità

Teorema 2.7. (cfr. [KRS]). Sia $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$ e $P(D)$ come nel Teorema 2.6. Sia $v \in L^{n/2}(\mathbb{R}^n)$ e sia $u \in H^{2,p}(\mathbb{R}^n)$ una soluzione di

$$(2.31) \quad |P(D)u| \leq |Vu| \quad \text{in } \mathbb{R}^n.$$

Se il $\text{supp } u$ è contenuto in un semispazio $H_v = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle x, v \rangle \geq 0\}$, allora $u \equiv 0$ in \mathbb{R}^n .

Vi sono anche delle versioni locali del Teorema 2.7 nel caso in cui $Q(D) = \Delta$, oppure $Q(D) = \square$. Per quest'ultima si rinvia a [KRS]. Va qui sottolineato che la dimostrazione del Teorema 2.5 si poggia in modo determinante sul seguente Lemma di restrizione dovuto a Strichartz che nel caso non ellittico sostituisce il Lemma di Tomas Stein (2.11). Se Q è come in (2.27) denotiamo con $H_+^n = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid Q(\xi) \geq 0\}$, mentre con S_+^{n-1} denotiamo le "sfere" $S_+^{n-1} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid Q(\xi) = +1\}$. Allora (cfr. ad. es. [GS]) esiste una misura canonica $d\omega_+$ su S_+^{n-1} tale che su H_+^n $d\xi = \rho^{n-1} d\rho d\omega_+$, essendo $\xi = \rho\omega$ con $\omega \in S_+^{n-1}$.

Lemma 2.1. (cfr. [S]). Sia $n \geq 3$ e siano $\frac{1}{p} - \frac{1}{p'} = \frac{2}{n}$. Allora esiste $C = C_{n,p} > 0$ tale che

$$(2.32) \quad \left\| \int_{S_+^{n-1}} e^{2\pi i \langle \cdot, \omega \rangle} \hat{f}(\omega) d\omega_+ \right\|_{p'} \leq C \|f\|_p, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Concludiamo questa breve analisi dei legami intercorrenti fra teoremi di restrizione e risultati d'unicità con un doveroso riferimento. Hörmander fu il primo ad usare, seguendo un suggerimento di P. Sjölin, un teorema di restrizione per dimostrare stime di tipo Carleman in [H]. Il suo risultato, relativo a operatori ellittici con parte principale più generale di quella del Teorema 2.6, non permette tuttavia la considerazione di termini d'ordine zero in $L^{\frac{n}{2}}$. Si veda a tal proposito la discussione in [G]₂.

Un'altra area di interesse collegata al problema della restrizione è quella delle stime a priori per equazioni di tipo iperbolico. Tale connessione è stata messa in risalto da I. Segal in [Se] nel caso bidimensionale, e successivamente ripresa da Strichartz e altri nel caso di dimensione arbitraria. Per ragioni di brevità ci limiteremo a un esempio significativo. Nel seguito se $m \in \mathbb{R}$ denotiamo con B l'operatore $B = (m^2 - \Delta)^{1/2}$. Se $\square = \Delta - D_t^2$ in \mathbb{R}^{n+1} , l'operatore lineare di Klein-Gordon è $\square - m^2$. Vale il seguente

Teorema 2.8. (cfr. [Se] e [S]). *Sia u una soluzione del problema di Cauchy ($n \geq 2$)*

$$(2.33) \quad \begin{cases} (\square - m^2)u = g & \text{in } \mathbb{R}^{n+1} \\ u(\cdot, 0) = f_0, \quad D_t u(\cdot, 0) = f_1 \end{cases}$$

con $B^{1/2} f_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $B^{-1/2} f_1 \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

(1) se $m \neq 0$,

$$\frac{2(n+1)}{n+3} \leq p \leq \frac{2(n+2)}{n+4}$$

e $g \in L^p(\mathbb{R}^{n+1})$, allora $u \in L^q(\mathbb{R}^{n+1})$ con $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$ e risulta per $C = C(n) > 0$

$$(2.34) \quad \|u\|_q \leq C(\|B^{1/2} f_0\|_2 + \|B^{-1/2} f_1\|_2 + \|g\|_p).$$

(2) se $m = 0$, allora (2.34) vale con

$$p = \frac{2(n+1)}{n+3} \quad \text{e} \quad q = \frac{2(n+1)}{n-1}.$$

Per fissare le idee consideriamo il caso in cui $m \neq 0$.

Se $g \equiv 0$ la soluzione di (2.33) si scrive

$$(2.35) \quad u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(\langle x, \xi \rangle + t \sqrt{m^2 + 4\pi^2 |\xi|^2})} \phi_+(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{m^2 + 4\pi^2 |\xi|^2}} \\ + \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(\langle x, \xi \rangle - t \sqrt{m^2 + 4\pi^2 |\xi|^2})} \phi_-(\xi) \frac{d\xi}{\sqrt{m^2 + 4\pi^2 |\xi|^2}}$$

$$\text{dove } \phi_+ = \frac{1}{2}(Bf_0 + i\hat{f}_1) \quad , \quad \phi_- = \frac{1}{2}(\widehat{Bf_0} - i\hat{f}_1).$$

Consideriamo l'iperboloide $\tau^2 - |\xi|^2 = (\frac{m}{2\pi})^2$.

La misura canonica sull'iperboloide è data da

$$d\sigma(\xi) = \frac{\pi d\xi}{\sqrt{m^2 + 4\pi^2 |\xi|^2}}$$

La u in (2.35) risulta perciò nella forma $u = \mathcal{F}^{-1}(F d\sigma)$ su ognuno dei due "rami" dell'iperboloide. In tal caso la (2.34) è conseguenza della versione duale del risultato di restrizione

$$\|\hat{F} d\sigma\|_2 \leq C \|F\|_p,$$

che è data da

$$\|(F d\sigma)^\wedge\|_p \leq C \|F d\sigma\|_2.$$

Si confronti [S] per i dettagli.

Infine, citiamo i lavori $[M]_{1,2}$ e [MSW] per applicazioni di risultati di decadimento a questioni di scattering.

BIBLIOGRAFIA

- [G]₁ N. GAROFALO, Sviluppi recenti in analisi armonica, Parte I, Seminario di Analisi Mat., Dip. di Mat., Bologna.
- [G]_{2,3} N. GAROFALO, Risultati d'unicità per operatori ellittici, Parte I, Parte II, Seminario di Analisi Mat., Dip. di Mat., Bologna.
- [GL]₁ N. GAROFALO and F.H. LIN, Monotonicity Properties of Variational Integrals, A_p Weights and Unique Continuation, Indiana Univ. Math. J., 35, no. 2 (1986), 245-268.
- [GL]₂ N. GAROFALO and F.H. LIN, Unique Continuation for Elliptic Operators: A Geometric-Variational Approach, Comm. on Pure and Applied Math.
- [GS] I.M. GELFAND and G.E. SHILOV, Generalized Functions, vol. I, Academic Press (1964).
- [H] L. HÖRMANDER, Uniqueness Theorems for Second Order Elliptic Differential Equations, Comm. in PDE 8(1) (1983), 21-64.
- [JK] D. JERISON and C.E. KENIG, Unique Continuation and Absence of Positive Eigenvalues of Schrödinger Operators, Annals of Math. 121 (1985), 463-488.
- [K]₁ C.E. KENIG, Continuation Theorems for Schrödinger Operators, Preprint.
- [K]₂ C.E. KENIG, Carleman Estimates, Uniform Sobolev Inequalities for Second Order Differential Operators, and Unique Continuation Theorems, Berkeley, July 1986, International Congress of Mathematicians.
- [KRS] C.E. KENIG, A. RUIZ and C.D. SÖGGE, Sobolev Inequalities and Unique Continuation for Second Order Constant Coefficient Differential Operators, Preprint.
- [M]₁ B. MARSHALL, The Fourier Transforms of Smooth Measures on Hypersurfaces of R^{n+1} , Canadian J. Math., 38 (1986), 328-359.

- [M]₂ B. MARSHALL, Mixed Norm Decay for the Klein-Gordon Equation with Initial Data in L^p , Canadian Math. Bull., 29(1) (1986), 11-19.
- [MSW] B. MARSHALL, W. STRAUSS and S. WAINGER, L^p-L^q Estimates for the Klein-Gordon Equation, J. Math. Pures et Appl. 59(1980), 417-440.
- [RS] M. REED and B. SIMON, Methods for Modern Math. Physics, vol. IV, Academic Press (1978).
- [Se] I. SEGAL, Space-Time Decay for Solutions of Wave Equations, Advances in Math. 22 (1976), 305-311.
- [S] R.S. STRICHARTZ, Restrictions of Fourier Transforms to Quadratic Surfaces and Decay of Solutions of Wave Equations, Duke Math. J. 44 (3) (1977), 705-714.